Correction du devoir maison $n°7$

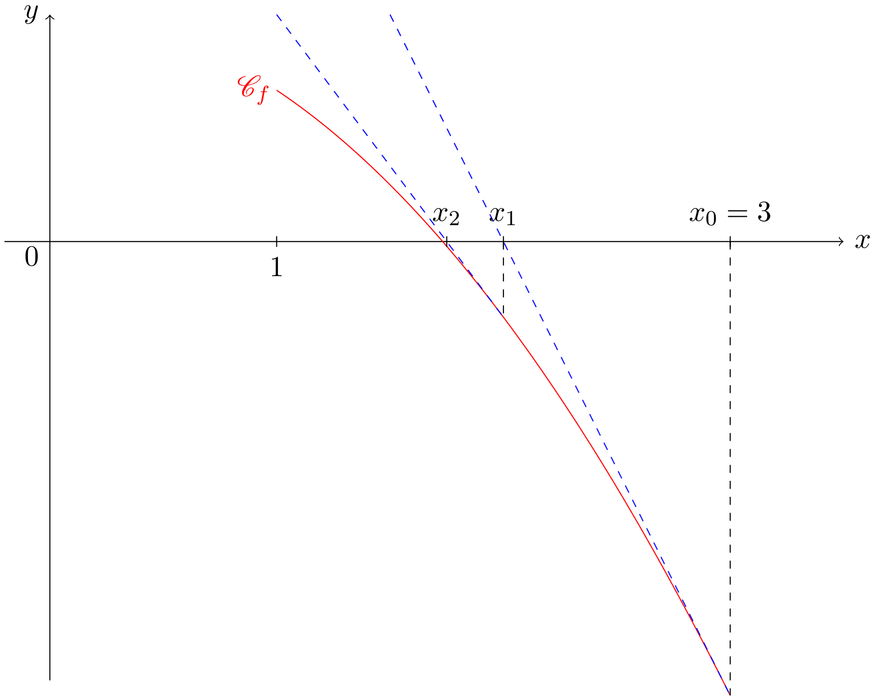
Méthode de Newton

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$.
On suppose en outre que :

- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$;
- f' est strictement négative sur $[a, b]$.

Partie I. Principe de la méthode de Newton.

1. On sait que f est continue sur $[a, b]$ et $0 \in]f(b), f(a)[$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) une solution à l'équation $f(x) = 0$ dans $]a, b[$. De plus, f' est strictement négative donc f est strictement monotone donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $]a, b[$ que l'on note α.
2. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $(x_0, f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Ainsi, l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe abscisse et de cette tangente vérifie l'équation : $0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$. D'où $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ car $f'(x_0)$ est non nul.
3. **Exemple.** $f : x \mapsto 3 - x^2$. Ainsi, f est bien $\mathscr{C}^2$ sur $[1, 3]$, $f(1) = 2 > 0$, $f(3) = -6 < 0$ et pour tout $x \in [1, 3]$, $f'(x) = -2x < 0$.



Partie II. Étude de la fonction g.

1. f et f' sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ car f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$. Ainsi, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ en tant que différence et quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in [a, b]$, $g'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$.
   On obtient ainsi, $g(\alpha) = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ et $g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$.
2. (a) $|f'|$ et $|f''|$ sont continue sur le segment $[a, b]$ en tant que composée de fonctions continues (f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ et la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$). Ainsi, elles sont bornées et atteignent leur bornes.

Ainsi, il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(c)| \leq |f'(x)|$ et $|f''(x)| \leq |f''(d)|$. Comme, f' est strictement négative sur $[a,b]$, on a $|f'(c)| > 0$. Posons $m = |f'(c)|$, on a bien $m \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(x)| \geq m$.
Posons $M = 1 + |f''(d)|$, on a $M \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in [a,b]$, $|f''(x)| \leq M$.

(b) On sait que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Ainsi, f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $\beta \in [a,b]$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leq |f'(\beta)|$. Posons $L = |f'(\beta)|$. On a $L \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leq L$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que f est L-lipschitzienne sur $[a,b]$. Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t) - f(\alpha)| \leq L|t-\alpha|$ ($\alpha \in [a,b]$). Or, $f(\alpha) = 0$. Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leq L|t-\alpha|$.

(c) Soit $x \in [a,b]$. On sait que pour tout $t \in [a,b]$, $g'(t) = \dfrac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2}$.
Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$, $|g'(t)| = \left|\dfrac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2}\right| \leq \dfrac{|f(t)||f''(t)|}{|f'(t)|^2}$.
Or, on sait que pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leq L|t-\alpha|$, $\dfrac{1}{|f'(t)|^2} \leq \dfrac{1}{m^2}$ et $|f''(t)| \leq M$.
Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$, $|g'(t)| \leq \dfrac{ML}{m^2}|t-\alpha|$.
Plus particulièrement, pour tout t compris entre x et α, $|g'(t)| \leq \dfrac{ML}{m^2}|x-\alpha|$.
D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à g entre x et α, on obtient :

$$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{ML}{m^2}|x-\alpha| \times |x-\alpha|$$

Or, $g(\alpha) = \alpha$ donc l'inégalité se réécrit : $|g(x) - \alpha| \leq \dfrac{ML}{m^2}|x-\alpha|^2$.

(d) Pour $K = \dfrac{ML}{m^2} \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in [a,b]$, $|g(x) - \alpha| \leq K|x-\alpha|^2$.

3. Pour $x \in [1,3]$, $f(x) = 0 \iff x = \sqrt{3}$. Ainsi, ici $\alpha = \sqrt{3}$.
De plus, pour tout $x \in [1,3]$, $|f'(x)| = 2x$ et $|f''(x)| = 2$.
Ainsi, $m = 2$, $L = 6$ et $M = 2$ conviennent. On peut donc poser $K = \dfrac{ML}{m^2} = \dfrac{2 \times 6}{2^2} = 3$.
Pour tout $x \in [1,3]$, $|g(x) - \sqrt{3}| \leq 3|x-\sqrt{3}|^2$.

Partie III. Étude de la suite (x_n).

1. On suppose que la suite (x_n) est bien définie.

(a) Montrons que par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^n}$.
On a $\dfrac{1}{K}\left(K|x_0-\alpha|\right)^{2^0} = \dfrac{1}{K}\left(K|x_0-\alpha|\right) = |x_0 - \alpha|$. Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{K}\Big(K|x_0-\alpha|\Big)^{2^n}$.
Ainsi,

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - \alpha| \leq K|x_n - \alpha|^2 \underset{HR}{\leq} K\left[\frac{1}{K}\Big(K|x_0-\alpha|\Big)^{2^n}\right]^2 \leq K \times \frac{1}{K^2}\Big(K|x_0-\alpha|\Big)^{2^n \times 2}$$
$$\leq \frac{1}{K}\Big(K|x_0-\alpha|\Big)^{2^{n+1}}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.
On a donc bien prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{K}\Big(K|x_0-\alpha|\Big)^{2^n}$.

(b) Si x_0 vérifie $K|x_0-\alpha|<1$ i.e. $|x_0-\alpha|<\frac{1}{K}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(K|x_0-\alpha|\Big)^{2^n}=0$.
La suite (x_n) converge donc vers α d'après la question précédente.

2. **Exemple.**

(a) On a $g : x\mapsto \frac{x}{2}+\frac{3}{2x}$ d'où $g' : x\mapsto \frac{1}{2}-\frac{3}{2x^2}$ i.e. $g' : x\mapsto \frac{x^2-3}{2x^2}$.
D'où g est décroissante sur $[1,\sqrt{3}]$ et croissante sur $[\sqrt{3},3]$.
De plus, $g(1)=2$, $g(\sqrt{3})=\sqrt{3}$ et $g(3)=2$, d'où $g([1,3])=[\sqrt{3},2]\subset[1,3]$.
L'intervalle $[1,3]$ est stable par g et contient x_0, la suite (x_n) est donc bien définie et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in[1,3]$.

(b) On remarque que $1.7^2=2.89$ et $2^2=4$. Ainsi, $1.7^2<3<4$. Comme la racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient : $1.7<\sqrt{3}<2$. On obtient alors, que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|x_n-\sqrt{3}|\leq \frac{1}{3}\Big(3\times|2-\sqrt{3}|\Big)^{2^n}\leq \frac{1}{3}\Big(3\times 0.3\Big)^{2^n}=\frac{1}{3}(0.9)^{2^n}$$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(0.9)^{2^n}=0$ d'où (x_n) converge vers $\sqrt{3}$.

(d) Afin d'obtenir une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près, il suffit de calculer x_{N_1} avec $N_1\in\mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{3}(0.9)^{2^{N_1}}\leq 10^{-100}$. Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(0.9)^{2^{N_1}}\leq 10^{-100} \quad\iff\quad (0.9)^{2^{N_1}}\leq 3\times 10^{-100} &\iff 2^{N_1}\ln(0.9)\leq \ln(3\times 10^{-100})\\
&\iff 2^{N_1}\geq \frac{\ln(3\times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\\
&\iff N_1\ln(2)\geq \ln\left(\frac{\ln(3\times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right)\\
&\iff N_1\geq \frac{\ln\left(\dfrac{\ln(3\times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

On pose $N_1=\left\lfloor \dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln(3\times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right)}{\ln(2)}\right\rfloor+1$.

En effectuant $N_1=12$ itérations, on aura bien une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près.

(e) Si l'on effectue la méthode de dichotomie sur le segment $[1,3]$, on crée deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\sqrt{3}$. De plus, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_n-\sqrt{3}|\leq\dfrac{3-1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$. Afin de calculer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près, il suffit de calculer a_{N_2} avec $N_2\in\mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{N_2-1}}\leq 10^{-100}$. Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{N_2-1}}\leq 10^{-100} \quad &\iff -(N_2-1)\ln(2)\leq -100\ln(10)\\
&\iff (N_2-1)\geq \frac{100\ln(10)}{\ln(2)}\\
&\iff N_2\geq \frac{100\ln(10)}{\ln(2)}+1
\end{aligned}$$

On pose $N_2=\left\lfloor \dfrac{100\ln(10)}{\ln(2)}+1\right\rfloor+1$.

En effectuant $N_2=334$ itérations, on aura bien une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près.